OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS FORHANDLINGER. 1914. N° 4.

OM ANVENDELSE AF REGNING OG AF RÆSONNEMENT I MATHEMATIKEN

VED FORELÆGGELSEN AF H. G. ZEUTHEN: LEHRBUCH DER ABZÄHLENDEN METHODEN DER GEOMETRIE. LEIPZIG 1914

FORELAGT I MØDET D. 16. OKTBR. 1914

AF

H. G. ZEUTHEN

Min første Professor i Mathematik ved Universitetet Chr. Jürgensen sagde til mig: Mathematik er en Dovenskabsvidenskab. Det tiltalte mig, ikke fordi jeg var særlig doven anlagt; men i Overensstemmelse med Ordenes Mening vilde jeg gerne naa Resultaterne ad den korteste Vej og særlig gerne undgaa vidtløftige Regninger, i hvilke jeg hverken var saa sikker eller saa hurtig, som en Mathematiker kunde ønske. Derfor har jeg ofte anvendt Dage paa at finde en rent geometrisk Løsning af en geometrisk Konstruktionsopgave, som ved Regning maaske kunde løses paa et Kvarterstid; men jeg søgte da ogsaa en Løsning, som, engang funden, maatte betragtes som mere simpel, direkte og oplysende end den, som Regning vilde give.

Min næste Professor A. Steen sagde omtrent saaledes: Jeg finder ikke et mathematisk Resultat vel begrundet, før det fremtræder som fuldt sikret ved Regning. Dette Ord toges naturligvis i den videre Forstand, hvori jeg her vil bruge det, saa det ikke blot omfatter Talregning, men ogsaa Bogstavregning og videregaaende Formeldannelser, ja overhovedet enhver lovmæssig Operation med Symboler, hvis

Brug forud er sikret og afgrænset i bestemte Former. Det gav mig andet at tænke paa. Opgive en saadan friere Brug af de efterhaanden vundne Resultater, som jeg vil kalde Ræsonnement, kunde og vilde jeg ikke, men heller ikke kunde jeg nøjes med en blot personlig Overbevisning om mine Resultaters Sikkerhed; min Begrundelse maatte være en saadan, at den ogsaa uden bagefter at kontrolleres ved Regning kunde kræve den samme absolute Tillid, som Steen og mange med ham søgte i Regning. Under min Stræben efter ad mine egne Veje at tilfredsstille min dygtige Lærers Krav om formel Klarhed kom dette mig endnu mere til Gode, end om jeg havde søgt at opfylde det ad den Vej, som han nærmest foreskrev. Iøvrigt har jeg baade da og senere, ogsaa som Historiker, omvendt haft Øje for den Fare, for hvilken Regneren er udsat. Han kan for det første regne Fejl, bruge de foreskrevne Veje urigtig, og det kan ske, at han netop i tryg Tillid til den Sikkerhed, som Regningen giver, kommer udenfor de Grænser, indenfor hvilke den gælder. I sin Tid regnede man saaledes dristig med uendelige Rækker uden at spørge om deres Konvergens. Faren opstaar, idet Regneren optaget af sin Operation med Regnesymbolerne glemmer at ræsonnere over deres rette Brug.

Fuldt saa opmærksom maatte min Kritik dog være overfor Arbejder indenfor den af mig selv foretrukne Retning. Vel udtaler de Mathematikere, som finder noget, i Reglen, at de først er ledede til deres Opdagelse af et Ræsonnement, der har givet dem en Formodning om dens Rigtighed, og først bagefter har sikret denne ved Regning. Men naar jeg vil hævde, at den samme Sikkerhed i Reglen kan opnaas ved en uddybende Prøvelse af de Ræsonnementer, som har ført til Resultatet, uden at man gaar de Omveje, som Brugen af de færdige, for andre Undersøgelser bestemte Regneregler og Symboler ofte kræver, ja saa har jeg ogsaa maattet have Øje for de logiske Svagheder i de Ræsonnementer, hvormed

Folk af min Retning af og til har ladet sig nøje. Jeg har saaledes maattet se kritisk paa nogle af de Ræsonnementer, som en CAYLEY og en SALMON undertiden har anvendt, om end med en britisk bonsens, der trods Ræsonnementets logiske Svaghed i Reglen har ført til et rigtigt Resultat.

Naar jeg her har den Ære at forelægge Selskabet en Bog, hvor jeg i Tilslutning til en stor Del af mine tidligere geometriske Arbejder paa en Maade, som jeg bagefter skal omtale, sætter Ræsonnement i Stedet for virkelig Udførelse af Regning, vil jeg gerne ogsaa overfor de Medlemmer, som ikke er Mathematikere, gøre Rede for det Forhold, hvori mine Bestræbelser staar til saadanne, som paa mere omfattende Maade er oppe i vor Tids videnskabelige Verden. Spørgsmaalet om Forholdet mellem Brug af Regning og Ræsonnement i Mathematiken er en Side af det almindelige Spørgsmaal om den videnskabelige Brug af Symboler i den omfattende Forstand, hvori BERGSON tager dette Ord, og Intuition; i Juraen fremtræder som svarende dertil Forholdet mellem Regler og Skøn. Ordet Regning tager jeg nemlig som sagt i Betydning af Mathematikens lovbundne og derved sikkert regulerede Brug af Symboler; Ræsonnementet derimod maa støtte sig paa Intuition. Dette har man ofte med nogen Grund bebrejdet de saakaldte geometriske Beviser, som har bygget paa de øjensynlige Egenskaber ved en tegnet Figur. Det maa imidlertid erindres, at der, som Prof. HØFFDING har omtalt her i Selskabet[1], gives forskellige Former for eller Trin af Intuition.

Ved Intuition forstaar jeg en saadan Helhedsopfattelse, som i sig omfatter alle Enkeltheder. Disse Ord, som jeg i Reglen vil bruge, kan dog paa mange Punkter ombyttes med det centrale og det dertil hørende periferiske, eller med Tingen selv og dens Egenskaber. Enkelthederne kan vel betragtes som mindre Helheder,

[1] K. D. Vidensk. Selsk. Oversigt 1914 S. 75 ff.

og bliver da ogsaa hver for sig Genstand for en Intuition; men vil man gøre dem gældende overfor den større Helhed, maa de i denne repræsenteres ved hver sit Symbol, det være sig et mathematisk Tegn eller et Kunstord, en Regel for disses Benyttelse, en derved opstaaet Formel, Slutning eller Sætning.

Det første Trin, HØFFDINGS konkrete Intuition, havde jeg selv tidligere tænkt at kalde apriorisk Intuition, men jeg vil her kalde det Helhedsfornemmelse. Det karakteriseres nemlig ved, at det vel omfatter de Enkeltheder som Helheden rummer, men at endnu ingen af dem træder saaledes frem for Bevidstheden, at den behøver at fremstilles ved noget Symbol. Paa en saadan Fornemmelse kan man vel bygge en Tro, der praktisk talt gør samme Nytte som Viden, men ingen Videnskab.

HØFFDINGS 2det og 3die Trin vil med min her anførte Bestemmelse af Intuition ikke optræde som særlige Former af denne. Praktiske Sider af Intuitionen kan træde frem paa begge dens Hovedtrin og alle Overgange mellem disse, og den Udskillelse og Prøvelse af Enkelthederne, som kræves for paany at sammenfatte dem i en fuldkomnere Intuition, rummer vel gentagen Intuition af disse Enkeltheder, men danner ikke Intuition af nogen ny Art. Den forbindes blot med Abstraktion og Analyse.

Ved Brug af disse videnskabelige Operationer omdannes den oprindelige aprioriske Intuition til en aposteriorisk Intuition, HØFFDINGS synthetiske Intuition. Jeg kan kalde den Helhedserkendelse; efter Beskaffenheden af dens Genstand optræder den enten som Helhedsviden, SPINOZA's *scientia intuitiva*, eller som Helhedsforstaaen, den intuitive Intellectus, et Ord, som den filosofiske Professor RASMUS NIELSEN benyttede i mit Rusaar, uden at jeg nu kan erindre den Bestemmelse, som han knyttede dertil. Denne Viden eller Forstaaen maa da ogsaa omfatte alle

Enkelthederne, vel ikke saaledes, at man paa en Gang tænker paa hver enkelt af dem, men saaledes at man er vis paa, at de er tilstede, og at man om fornødent kan drage dem frem af sin Underbevidsthed, hvis der spørges efter dem. At man kan bruge en saadan Helhedserkendelse i et videnskabeligt Ræsonnement, der ogsaa skal overbevise andre, beror paa, at man kan forudsætte den samme Helhedserkendelse hos de Tilhørere eller Læsere, til hvem man henvender sig. Dette maa man saa vidt muligt forud sikre sig; hvis ikke, maa det opnaas ved at besvare eventuelle Spørgsmaal, en Besvarelse, som den, der selv besidder denne fuldkomne Intuition, vil have paa rede Haand.

En saadan Helhedserkendelse synes SPINOZA og HØFFDING nu vel at betragte som et Ideal, der skal tilstræbes, men ikke fuldt kan naas. Man kan ikke naa ind til »das Ding an sich«. H. POINCARÉ opfatter selve Naturlovene, der dog skulde udtrykke Helhedserkendelser, som Symboler, der ogsaa kunde ombyttes med andre. Apostlen PAULUS siger: »Nu se vi kun stykkevis«. Med mathematisk Erkendelse forholder det sig dog anderledes, hvad der simpelt hen beror paa, at denne Erkendelse selv er symbolsk. Den omfatter nemlig i Virkeligheden kun et begrænset Antal Enkeltheder, som lader sig samle til et Hele, som man dernæst ved Brug af dertil egnede Symboler kan lade optræde som Enkelthed enten i en videregaaende mathematisk Undersøgelse eller i en af Mathematikens Anvendelser.

Hvorledes man nu virkelig i Mathematiken kan naa fra det første til det sidste Trin af Intuition, fra intuitiv Fornemmelse til intuitiv Erkendelse, kan jeg oplyse ved et Exempel, hvormed jeg har beskæftiget mig i mine Undersøgelser over den græske Geometri's Tilbliven[1]. Ligedannethed er en meget oprindelig Helhedsfornemmelse, som ligger til Grund for de første Forsøg paa Afbildning. Eskimoer,

[1] Se navnlig K. D. Vid. Selsk. Oversigt 1913, S. 431 ff.

der spørges ud om Fortsættelsen af en Kyst, skal saaledes kunne tegne en meget paalidelig Kystlinie. Uden at indføre saadanne Symboler som Begreberne Vinkel og Forhold vil man paa et saadant Billede give Vinkler og Forhold tilnærmet rigtige Størrelser og vide, at man paa et tegnet Kort kan afmaale Afstande. Først med Indførelse af de her nævnte Symboler indtræder den videnskabelige Undersøgelse, der strækker sig gennem Læren om Vinkler, Paralleler, kongruente Figurer, Proportioner ogsaa mellem inkommensurable Størrelser og deres geometriske Anvendelser, lige til man kan opstille den almindelige Lære om kontinuerte ligedannede Figurer, omfattende deres Egenskaber, Maaden, hvorpaa de bestemmes og konstrueres o. s. v.[1]. Derved opnaas en Viden af det, hvoraf man begyndte med at have en Fornemmelse, samt megen ny Viden. Logisk er det egentlig nok, at man besidder denne mekanisk opdyngede Sum af Viden, udtrykt i de dertil tjenende Symboler, og paa denne kan bygge videre; men psykologisk vigtigt og af stor praktisk Betydning for videregaaende, frugtbar Anvendelse er det, at man kan samle al denne Viden til et organisk sammenhængende Hele. Det sker ved den samme sjælelige Evne, som fra først af gav en Helhedsfornemmelse. Den sætter nu istand til at huske Enkelthederne i denne

[1] Et andet Eksempel paa Overgangen fra Intuitionens første til dens sidste Trin kan hentes fra vor Tids danske Geometri. Min Paavisning af de Hovedformer, som Kurver af fjerde Orden kan antage, var bygget paa en intuitiv Betragtning særlig af Overgangsformerne, hvis Rigtighed vel ikke vil bestrides indenfor det behandlede, algebraisk bestemte Omraade, men udenfor dette kun vilde være en »Helhedsfornemmelse«. Derfor maatte Juel, der udstrakte sine Undersøgelser til ogsaa at omfatte ikke-algebraiske Kurver, sikre sig Almindeligheden af de benyttede Forudsætninger ved Indførelse af »Symbolet«: simpel Bue, og Hjelmslev gjorde Brugen af dette Symbol afhængig af Geometriens første Axiomer og har derved hævet den anvendte Intuition til det højeste Trin, Helhedsviden. Derved bliver den et uangribeligt Grundlag for min og Juels Bevisførelse.

Viden og de Veje, ad hvilke den opnaas, eller den træder snarere i Stedet for en saadan Erindring, idet Enkelthederne nu kommer frem af sig selv, naar man har Brug for dem. Det vundne Overblik sætter da ogsaa i Stand til at bruge den vundne Viden paa hensigtsmæssig Maade.

Værdien, altsaa ikke den logiske (thi Logiken forlanger kun, at alle de samlede Enkeltheder er beviste, og spørger ikke om, hvorledes de huskes), men den psykologiske og praktiske af en saadan organisk forbunden Helhedserkendelse vil da ogsaa enhver Mathematiker have haft Lejlighed til at erfare. Jeg skal anføre et Par Exempler. Det første, som gælder en intuitiv Forstaaen, henter jeg fra min Læsning af WEIERSTRASS' Bevis for den først af LINDEMANN fundne Sætning, at π er et transcendent Tal, et saadant, som ikke er Rod i nogen algebraisk Ligning med rationale Koefficienter. Beviset er sammensat af en lang Række Slutninger; ved Læsningen maatte jeg godkende dem en for en og derved med logisk Konsekvens ogsaa Enderesultatet; men af Mangel paa Overblik følte jeg mig ikke aldeles sikret mod den Mulighed, at det ved en Slutning vundne Resultat ikke i en senere var benyttet i videre Omfang end det var bevist. For en saadan rent personlig Fejl er man jo altid lidt udsat, og Faren voksede med Antallet af Slutninger. Jeg forstod ganske vist, hvorledes WEIERSTRASS beviste Sætningen, og stolede fuldt ud paa, at han besad det Overblik over de samme Slutninger, som jeg savnede; men det er jo ikke Meningen med et mathematisk Bevis. Et virkeligt intuitivt Overblik, en Helhedsindsigt, vilde skaffe fuld Tillid til Beviset, og tillige omfatte en Erindring om alle de enkelte Slutninger.

Som Exempel paa en intuitiv Viden, en Helhedsviden, kan jeg nævne den Viden, som er udtrykt i en bevist mathematisk Formel. Denne er helt og holdent sammensat af Symboler. Den, der kender disse, kan anvende Formlen paa saadanne Enkelttilfælde, som faas ved at give Symbolerne for Størrelser bestemte Talværdier, og til saadanne videregaaende Undersøgelser, for hvis Skyld den er dannet; men de helt nye Undersøgelser, i hvilke den kan gøre Nytte, kan vel, naar de først foreligger, ogsaa forstaas af andre, men kan kun udføres af den, som besidder et intuitivt Overblik, der under et sammenfatter alle Formlens Enkeltheder, helst tillige en Erindring om, hvilken Rolle disse Enkeltheder har spillet ved dens Tilbliven.

Den videnskabelige Udvikling og Fremstilling af de Enkeltheder, som man sammenfatter i en intuitiv Viden eller Forstaaen, er som alt sagt knyttet til Symboler og kan, naar dens Indhold skal udtales eller fremsættes, ikke frigøres fra saadanne; men Opfattelsen som en Helhed, som en »Ding an sich« tillader at fremstille eller genkende den samme Ting ved eller bag forskellige Symboler og genkende den samme Sammenknytning af de ved disse fremstillede Led. Paa Iagttagelsen heraf beror i ret væsentlig Grad de Bidrag, som jeg tidligere har kunnet yde til Forstaaelse af Oldtidens Mathematik. Jeg har nemlig aldrig kunnet lade mig nøje med en Forstaaen af et i Oldtiden fundet Resultat, som indskrænker sig til en Forstaaelse af, at Beviset, som er ført i os uvante Symboler, er fyldestgørende, medens man, hvad selve Opdagelsen angaar, indskrænker sig til en Beundring af, at den er lykkedes uden noget Kendskab til de Hjælpemidler eller den Symbolik, som vi nu anvender til saadanne Undersøgelser. Dog den, der har fundet et Resultat, maa ogsaa have haft Midler dertil. Rent saglig maa disse Midler tilmed have beroet paa Resultatets saglige Sammenhæng med de Sætninger, hvoraf det udledes. Og naar man har vundet en intuitiv Erkendelse af denne Sammenhæng, altsaa en saadan, som er uafhængig af de anvendte Symboler, saa maa man ogsaa forstaa, hvorledes denne er fremtraadt i og har været benyttet under de mere uvante gamle Symboler. Dertil kan man endog undertiden Skridt for Skridt ledes ved de Betragtninger, som knyttes til de moderne. Ræsonnementerne er de samme, selv om Symbolerne, Regnemidlerne er forskellige. Derved vindes Forstaaelsen. Paa denne Maade har jeg i min Bog om Keglesnitslæren i Oldtiden fundet Overensstemmelsen mellem de gamles geometriske Beviser og den analytiske Geometri's algebraiske Beviser. Forskellen ligger i de forskellige Symboler for de samme Operationer, nemlig Oldtidens geometriske Algebra og vor Tids litterale Algebra. Ligesom flere andre har jeg ogsaa længe hævdet Overensstemmelsen mellem de Betragtninger, som laa til Grund for de gamle Exhaustionsbeviser og de Integrationer, som nu fører til de samme Resultater. Det, som ligger bag de forskellige Symboler, er en Anskuen, Intuition af det uendelige. Hos de gamle stod oprindelig denne Intuition kun paa Intuitionens første utilstrækkelige Trin, Fornemmelsen. Derfor omsatte de den i Exhaustionsbevisets vidtløftige symbolske Former. Ogsaa i Integralregningens første Tid gik man ofte ud fra en endnu uudviklet Forestilling om det uendelige og var for saa vidt i logisk Henseende ikke naaet saa vidt som de gamle, om Anvendelserne end strakte sig langt videre. Senere har man vundet et fast Grundlag i en virkelig intuitiv Intellectus af Uendelighedsbegrebet, som gør Exhaustionsbevisets vidtløftige Symbolik overflødig og tillader at sætte Integralregningens kortfattede Tegnsprog i Stedet. At vi gennem saadanne Betragtninger fik den rigtige Forstaaelse af de gamles Undersøgelser, har senere ARCHIMEDES' af HEIBERG fundne Ephodikon vist. —

Men jeg skal vende tilbage til den i Begyndelsen af dette Foredrag berørte Økonomi, som ofte kan opnaas ved at sætte det paa Intuition grundede Ræsonnement i Stedet for Anvendelsen af Regning eller andre Symboler for Tænkningen. Besparelsen beror paa, at der til Anvendelsen af Symboler ofte knytter sig vidtløftige Undersøgelser, som ikke vedrører de stillede Spørgsmaal, men kun de til deres Besvarelse tjenende Symboler. Dem er det, man kan undgaa ved Hjælp af Ræsonnementet.

Netop herpaa afgiver den Bog, som jeg her forelægger, et Exempel, Naar man vil anvende den analytiske Geometris Regninger til en almindelig Undersøgelse, og ikke til konkrete Udregninger, beror det derved vundne Resultat jævnlig kun paa Graderne af de udviklede Ligninger, medens disses Dannelse ved Elimination og anden Regning tillige indbefatter en her ganske overflødig direkte eller dog symbolsk-algebraisk Bestemmelse af Værdierne af Ligningernes Koefficienter. Søger man f. Eks. i Planen den Linie, hvorpaa et Punkt, der tilfredsstiller en vis Betingelse, maa ligge, og finder, at dens Ligning er af første Grad, vil den være ret; er Ligningen af anden Grad, maa den være et Keglesnit, og naar man først ved dette, lader disse Linier sig i Reglen lettere bestemme paa anden Maade end ved den fuldstændige Dannelse af Ligningen. Derfor er det godt at have Methoder, der kun sigter til at bestemme Graderne af Ligningerne. Da nu Graden n af en Ligning

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

ogsaa er Antallet af dens Rødder, deri indbefattet imaginære og, naar $a_0 = 0$, uendelige, har saadanne Methoder faaet Navnet »tællende«, deraf Navnet paa min Bog. Methodernes Paalidelighed beror paa, at de Ligninger, hvis Grader man bestemmer, virkelig eksisterer og er algebraiske. Dette kan i Reglen afgøres ved en Intuition, men det gælder da om, at denne tilfredsstiller Betingelserne for at være en intuitiv Viden og ikke blot Fornemmelse. Disse Betingelser har de fleste Forfattere ogsaa stræbt at opfylde; men der har været Undtagelser, og i en Lærebog med en sammenhængende Fremstilling af Methoderne maa der gives tilsvarende Regler, hvorved man altid kan og maa sikre sig, at de er opfyldte, og at i det hele de Ræsonnementer, som træder i Stedet for Regning, er vel begrundede. Tillige maa Lærebogen vise Methodernes Hensigtsmæssighed, ja ved Eksempler fra Geometriens forskellige Dele oplyse, at de saa at sige i alle almindelige Undersøgelser kan sættes i Stedet for den analytiske Geometris virkelige Udregninger. — Naar den omtalte intuitive Viden virkelig sikres, hvad der som sagt kræver en Henvisning til den analytiske Geometris Principer, vil omvendt Antalgeometriens Ræsonnementer kunne benyttes som Vejledning til den rette Anvendelse af den analytiske Geometris Regning og vil ofte sikre mod de tidligere berørte Fejl, for hvilke Regneren paa sin Side er udsat.

Disse min Bogs Formaal findes omtalte i dens Fortale, hvoraf jeg her skal give et Uddrag:

»Det er 102 Aar siden, at Poncelet benyttede sin Fritid som Krigsfange i Saratow til at genoptage de paa École polytechnique for tidlig afbrudte mathematiske Studier. Derved maatte han ofte ombytte saadanne Dele af den analytiske Geometri, som han ikke helt huskede, med nyopfundne Methoder, og det lykkedes ham at finde saadanne som fører hurtigere til Maalet. Dette gælder ikke blot om den af ham grundlagte projektive Geometri, men ogsaa om det saakaldte Kontinuitetsprincip, paa hvilket han selv lagde stor Vægt. De Anvendelser af dette Princip, som findes i hans *Traité de la Géométrie Projective*, viser ikke blot, hvor hurtig og let man ved det uden algebraiske Regninger kommer til nye Resultater, men ogsaa, at man ved hans Methode i Virkeligheden kan opnaa samme Sikkerhed som ved virkelig at gennemføre disse Regninger. I de Tilfælde, som han behandler, er det nemlig ingen Tvivl underkastet, at de algebraiske Ligninger, hvis Grad han bestemmer ved at betragte specielle Tilfælde, virkelig eksisterer.«

»Den saaledes vundne Sikkerhed beror dog derpaa, at det er muligt at behandle de samme Opgaver algebraisk; men Poncelet vilde have sit Princip opfattet som en geometrisk Methode, der danner et Modstykke til den algebraiske Behandling, eller dog er uafhængig af denne. Nu lader det sig vel ogsaa anvende i visse Tilfælde, i hvilke den Kontinuitet, der maa være Forudsætning for en exakt Anvendelse, ikke sikres ved Muligheden af en algebraisk Fremstilling, men ved en rent geometrisk Definition, og en saadan krævede Poncelet i hvert Fald. Saadanne Tilfælde (som vi iøvrigt ogsaa her vil udelade) var dog ikke bekendte den Gang og skimtedes vel kun ubestemt selv af den vidtskuende Poncelet. Derfor kunde Cauchy, der næppe forstod at skatte den Nytte og fuldstændige Paalidelighed, som Poncelet's Princip har, naar det bruges indenfor de rette Grænser, betegne det som »une forte induction«.«

»Cauchy's Dom hindrede dog ikke, at Kontinuitetsprincipet efterhaanden blev brugt mere og mere, men gav ved Brugen Anledning til en ofte overflødig Forsigtighed. For klart at fremhæve Forudsætningerne for dets Paalidelighed har Schubert derfor, idet han gav det et nyt Navn »Principet om Antallets Vedligeholdelse«, dertil knyttet en ny Formulering, hvori der tages Hensyn til dets Forbindelse med Algebraen; men ogsaa denne Formulering har givet Anledning til ny Kritik. Nu har man vel ved senere Tilføjelser opnaaet ulastelige Formuleringer; men disse vilde i Begynderens Øjne være for kunstige til i en Lærebog at danne Udgangspunktet for praktiske Anvendelser. Dertil vilde de ikke engang være tilstrækkelige, da de intet udsiger om, hvor mange Gange enhver Slags Løsninger skal tælles med i et søgt eller fundet Antal.«

»Derfor vil vi i denne Lærebog ikke søge at formulere et Princip om Antallets Vedligeholdelse, men indskrænke dette Princip til det rent algebraiske, at Graden af en algebraisk Ligning eller Antallet af dens Rødder er uafhængig af Størrelserne af Ligningens Koefficienter. Kun maa man tælle de forskellige Rødder, ogsaa uendelige, imaginære og sammenfaldende, i Overensstemmelse med Algebraens Fordringer. De tællende Methoder, som beror paa Antallets Vedligeholdelse, gaar da ud paa at udføre saadanne Tællinger. Dette kan ske ved at følge visse Regler, eller ved om fornødent at søge tilbage til den Form, som den algebraiske Behandling vilde antage i de foreliggende Tilfælde.«

»Idet vi i de to første Kapitler af denne Lærebog gør Rede for disse Methoder og de Former, som de kan antage, og oplyse dem ved talrige Exempler, vil vi give Anvisning paa deres exakte Brug og vække den Overbevisning, at de kan bruges med fuld Tillid. Samtidig bør det dog bemærkes, at de Forfattere, der har bygget paa Kontinuitetsprincipet eller Principet om Antallets Vedligeholdelse, i Reglen har anstillet de samme Betragtninger uden dog udtrykkelig at sige det. Derved bliver det forstaaeligt, at der trods den Mistanke, som Cauchy udtalte, og som ofte er bleven næret mod dette Princip, næppe lader sig paavise noget urigtigt Resultat, hvortil det har ført. Kun om en enkelt Art af Anvendelser gælder det, at de beror paa en ufuldstændig Induktion. Om denne vil der blive talt i Nr. 33.«

»Iøvrigt maa man i Virkeligheden anstille ganske de samme Betragtninger for omvendt at gøre rigtige Anvendelser af Resultater fundne ved analytisk Geometri paa specielle Tilfælde, og lignende Betragtninger er nødvendige for paa rette Maade at skelne mellem de Løsninger, som findes ved Anvendelse af det mindre bestridte Korrespondanceprincip. Dette Princip baade i dets oprindelige af Chasles og Jonquières fundne Skikkelse og i den udvidede, som skyldes Cayley og Brill, samt dets Anvendelser behandles i fjerde Kapitel, efter at man i tredje Kapitel har lært Slægtsætningerne og deres Anvendelser at kende. Hvad angaar det CAYLEY—BRILL'ske Princip, har vel A. HURWITZ vist, at det ikke omfatter alle Slags Korrespondancer mellem Punkter paa en Kurve, og selv opstillet en almindeligere Formel. Da denne dog aldrig er brugt til virkelige Tællinger, har jeg heller ikke her medtaget den, men, i Overensstemmelse med et Forslag, som H. BURCKHARDT havde stillet i Comptes Rendus for 1898, paa en Maade, som slutter sig til CAYLEY's og BRILL's egne Sætninger. Det sker ved at behandle saadanne Korrespondancer, der ikke direkte passer ind i den af dem opstillede Form, som Korrespondancer med brudne Værdital (Wertigkeiten).«

»Derved afviger min Behandling af dette Korrespondancespørgsmaal væsentlig fra F. SEVERI's, som bygger sin paa den BRILL—NÖTHER'ske Lære om lineære Rækker af Punktgrupper paa en Kurve, medens jeg har valgt et mere tællende Udgangspunkt, ud fra hvilket man ogsaa kan behandle de nævnte Rækker. SEVERI's Behandling kan man lære at kende af hans fortræffelige *Lezioni di Geometria Algebrica*, Padova 1908 (der ogsaa snart vil udkomme i tysk Oversættelse). Antallet af Bøger, hvori de her foreliggende Spørgsmaal behandles, er endnu saa lille, at det er godt og nyttigt, at der i dem tages forskellige Udgangspunkter.«

»I tredie og fjerde Kapitel behandler jeg iøvrigt ikke blot korresponderende Punkter paa Kurver, men ogsaa paa Flader.«

»Af femte Kapitel vil man se, at nogle i sin Tid meget drøftede, for vidtgaaende, almindelige Sætninger af JONQUIÈRES og CHASLES, for hvilke man havde opstillet særegne analytisk-geometriske Beviser, finder deres rette Begrænsning, naar man nøje iagttager den tællende Geometris Hovedregler.

I sjette Kapitel giver jeg en Vejledning i SCHUBERT's

»tællende Geometris Kalkyle«. Angaaende de derpaa grundede Formler henviser jeg dog til SCHUBERTS egen i 1876 udkomne Bog; denne Kalkyles videregaaende Anvendelser vilde man iøvrigt bedst lære at kende af en Bog om den flerdimensionale Geometri, og en saadan tør man vel vente i den Teubner'ske Samling af Lærebøger. Selv medtager jeg kun saa mange flerdimensionale Anvendelser af de tællende Methoder, som bebøves for at vise, at saadanne ogsaa ligger indenfor Methodernes Omraade.«

»Iøvrigt læres den rigtige Brug af tællende Methoder først ved Anvendelse paa forskelligartede Eksempler. Disse har jeg her valgt saaledes, at de tillige viser, hvor vidtstrakt det Omraade er, paa hvilket de lader sig anvende, og dette maa ogsaa være et Hovedformaal for en Lærebog. Ved de tællende Methoder kan man hurtigere naa til de samme almindelige Resultater som ved den analytiske Geometris Methoder. Derfor er Eksemplerne ogsaa valgte saaledes, at de viser Anvendeligheden paa de forskellige geometriske Former, som kan fremstilles algebraisk. Mange af de derved fremkommende Undersøgelser gennemføres, og man vil for de andre finde Anvisning til at gaa videre, end Pladsen her tillader. . . . . . Videre Stof til Øvelse findes i Opgaver ved Slutningen af de enkelte Afsnit . . . .«.

»Et Navn vil jeg endnu nævne her i Fortalen, nemlig min længst afdøde Ven G. HALPHEN'S. Hans kritiske Bemærkninger om forskellige Anvendelser af de tællende Methoder, Bemærkninger, som jeg ej blot kender fra hans Afhandlinger, men ogsaa fra mundtlige og skriftlige Meddelelser, samt de af ham fundne Midler til at overvinde de paagældende Vanskeligheder kom mig i høj Grad til Gode under Udarbejdelsen af en Lærebog, som skal give Anvisning paa en exakt Anvendelse af de tællende Methoder . . . . .«

Fortalen ender med en Tak til Carlsbergfondet, fordi det har sat mig i Stand til at søge min Afsked fra mit Embede og derved vinde Tid til at gøre Bogen færdig. Kun derved har den kunnet fremtræde i den Skikkelse og det Omfang, som jeg maatte ønske. Vel gaar den mere systematiske Brug af tællende Methoder et halvt Hundrede Aar tilbage i Tiden, min egen Andel i deres Udvikling og Anvendelse ligeledes, og vel havde jeg i Tilslutning til mine Forelæsninger udarbejdet en Del af Bogen. Mit Ønske om en bedre Paavisning af de enkelte Methoders fulde Berettigelse og rette Brug, om paa forskellige Punkter at udvide disse Methoder og om at bringe dem i den rette indbyrdes Forbindelse, samt de nye Anvendelser, til hvilke jeg fandt Anledning, har nemlig foraarsaget mange betydelige Omarbejdelser og mange Tilføjelser, der hver for sig har krævet nye Undersøgelser og kunde være fremtraadt i særegne Afhandlinger. Eksempelvis skal jeg nævne en Bestemmelse af Skæringspunkterne mellem en Rumkurve og en Flade og Behandlingen af den tilsvarende flerdimensionale Opgave, som ogsaa turde afhjælpe et Savn indenfor selve Algebraen, Simplifikationer og Forbedringer af mine tidligere Beviser for den CAYLEY-BRILL'ske Korrespondancesætning og for min Udvidelse af denne til Flader, Læren om Korrespondancer med (eventuelt) brudne Værdital og dens Anvendelse paa Kurver af tredie Orden, antalgeometrisk Undersøgelse af Kongruenser af 2. Orden og 2. Klasse og kummerske Flader, en antalgeometrisk Behandling af HALPHEN's Lære om Systemer af Keglesnit og Flader af 2. Orden m. m.